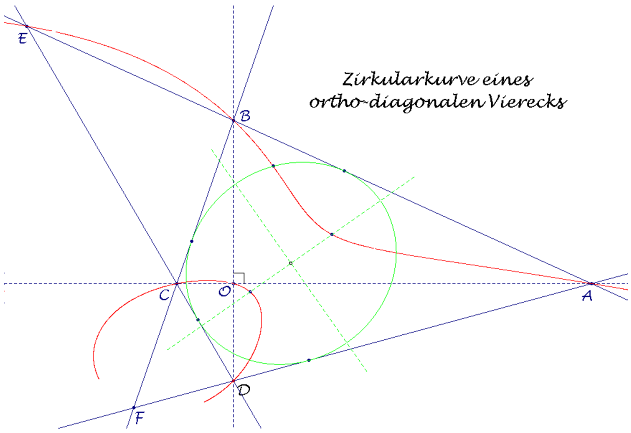
Die Zirkularkurve eines
ortho-diagonalen Vierecks

Eckart Schmidt

Für Vierecke mit orthogonalen Diagonalen liegen die Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte auf einer Zirkularkurve, die abschließend als eine „pivotal isogonal focal circular cubic“ [Gib] des Steiner-Dreiecks nachgewiesen wird. Die Geometrie dieser Zusammenhänge ist Gegenstand vorliegender Ausarbeitung. – Gearbeitet wird erst in kartesischen, dann in baryzentrischen Koordinaten.



Ortho-diagonale Vierecke

In der Literatur finden sich vereinzelt Ergebnisse zu ortho-diagonalen Vierecken *[Alt,136]*. Ausführlicher werden ortho-diagonale Sehnen-Vierecke behandelt, die Berühr-Sehnen-Vierecke von Sehnen-Tangenten-Vierecken sind. Hier wird aber nur die Orthogonalität der Diagonalen vorausgesetzt. Es liegt nahe, einem ortho-diagonalen Viereck *ABCD* ein kartesisches Koordinatensystem anzupassen:

$$A(a;0),\quad B(0;b),\quad C(g;0),\quad D(0;d)\ .$$

Der Diagonalenschnitt liegt im Ursprung *O*, und die Gegenseitenschnitte sind

$$E\left(\frac{ag(b-d)}{bg-da};-\frac{bd(a-g)}{bg-da}\right),\quad F\left(\frac{ag(b-d)}{ab-gd};\frac{bd(a-g)}{ab-gd}\right).$$

Die Diagonalenmitten bestimmen die Newton-Gerade *[Ehr]* mit der Gleichung

$$2(b+d)x+2(a+g)y-(a+g)(b+d)=0\ ,$$

auf der die Zentren der Berührkegelschnitte des Vierecks liegen. Betrachtet man das zugehörige vollständige Vierseit, so schneiden sich die Umkreise der Teildreiseite *ABF, BCE, CDF, DAE* im Miquel-Punkt

$$S(\frac{(a+g)(ag+bd)}{(a+g)^2+(b+d)^2};\frac{(b+d)(ag+bd)}{(a+g)^2+(b+d)^2})$$

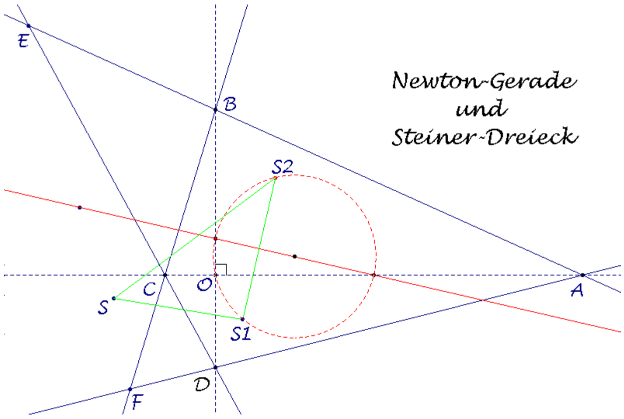
des Vierecks, der hier als auch Steiner-Punkt des Vierecks *ABCD* angesprochen sei.

> **Definition: Das Steiner-Dreieck SS_1S_2 eines Vierecks *ABCD* besteht aus den Miquel-Punkten der Vierecke *ABCD, ABDC, ADBC.***

Die weiteren Steiner-Punkte errechnen sich zu

$$S_1(\frac{(b-d)(bl-da)}{(a-g)^2+(b-d)^2};\frac{(a-g)(-bg+da)}{(a-g)^2+(b-d)^2}) \;,$$

$$S_2(\frac{(b-d)(ab-gd)}{(a-g)^2+(b-d)^2};\frac{(a-g)(ab-gd)}{(a-g)^2+(b-d)^2}).$$



Die Steiner-Punkte S_1 und S_2 eines ortho-diagonalen Vierecks sind die vom Diagonalenschnitt verschiedenen Schnitte der Thales-Kreise über den Seiten. Sie liegen symmetrisch zur Newton-Geraden und mit den Diagonalenmitten auf einem Kreis durch den Diagonalenschnitt mit Mittelpunkt im Schwerpunkt:

$$(x-\frac{a+g}{4})^2+(y-\frac{b+d}{4})^2=\frac{(a+g)^2+(b+d)^2}{16} \;.$$

Berührkegelschnitte

Berührkegelschnitte eines Vierseits sind durch ein Zentrum auf der Newton-Geraden oder einen Berührpunkt eindeutig festgelegt. Die Berührvierecke haben den gleichen Diagonalenschnitt wie das Ausgangsviereck. Gegenseiten schneiden sich in den vierten harmonischen Punkten des gemeinsamen Diagonalenschnitts auf den Diagonalen des Ausgangsvierecks. (Dies gestattet eine einfache Konstruktion eines Berührvierecks.) Die Polare des gemeinsamen Diagonalenschnitts ist immer die Verbindungsgerade der Gegenseitenschnitte des Ausgangsvierecks.

Betrachtet man in ortho-diagonalen Vierecken zwei diagonalen-symmetrische Geraden mit den Steigungen *m* bzw. *–m*, so schneiden diese die Gegenseiten *AB, CD* bzw. *BC, DA* des Vierecks *ABCD* in den Punkten

$$P_a\left(\frac{ab}{ma+b};\frac{mab}{ma+b}\right),\quad P_b\left(-\frac{bg}{mg-b};\frac{mbg}{mg-b}\right),$$

$$P_c\left(\frac{gd}{mg+d};\frac{mgd}{mg+d}\right),\quad P_d\left(-\frac{da}{ma-d};\frac{mda}{ma-d}\right).$$

Diese Seitenschnitte erweisen sich als Berührpunkte eines Kegelschnitts mit der Gleichung

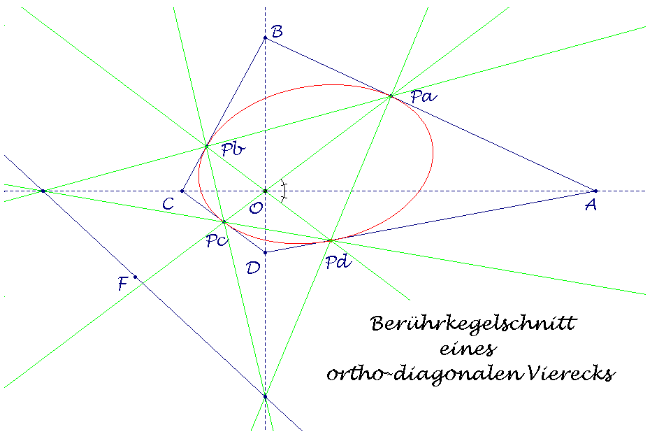
$$(a-g)(b-d)(m^2x^2+y^2)-2mxy(a+g)(b+d)$$
$$-4m(bdx^2+agy^2-bd(a+g)x-ag(b+d)y+abgd)=0$$

und dem Zentrum

$$Z\left(\frac{(a+g)(b-d)}{2m(a-g)+2(b-d)};\frac{m(a-g)(b+d)}{2m(a-g)+2(b-d)}\right)$$

auf der Newton-Geraden.
Jeder Berührkegelschnitt eines ortho-diagonalen Vierecks lässt sich damit in dieser Weise darstellen.

Satz 1. Die einbeschriebenen Kegelschnitte ortho-diagonaler Vierecke haben Berührvierecke mit Diagonalen, die symmetrisch zu den Diagonalen des Bezugsvierecks liegen.



Die vierten harmonischen Punkte des Diagonalenschnitts auf den Diagonalen sind

$$\left(\frac{2ag}{a+g};0\right)\quad und\quad \left(0;\frac{2bd}{b+d}\right);$$

ihre Polaren bzgl. der Berührkegelschnitte sind die Diagonalen des ortho-diagonalen Vierecks.

Brennpunkte der Berührkegelschnitte

Eine Bestimmung der Brennpunkte der Berührkegelschnitte mit der obigen Kegelschnittgleichung erweist sich auch computergestützt als schwer durchführbar. Hier sei ein anderer Zugang aufgezeigt:
Die Berührkegelschnitte eines Vierecks sind auch Berührkegelschnitte der vier Teildreiseite *ABF, BCE, CDF,*

DAE. Für Dreiecke sind die Brennpunkte von Berührkegelschnitten isogonal konjugiert. Dabei ist z.B. das isogonale Bild eines Punktes *X(x;y)* bzgl. des Teildreiseits *ABF*:

$$\left(\frac{-(dx+ay-da)(x(b^2-ag)+b(a+g)(y-b))}{(ay+bx-ab)(ag+bd)-(x^2+y^2-ax-by)(ab-gd)};\right.$$
$$\left.\frac{-(bx+gy-bd)(a(b+d)(x-a)+y(a^2-bd))}{(ay+bx-ab)(ag+bd)-(x^2+y^2-ax-by)(ab-gd)}\right).$$

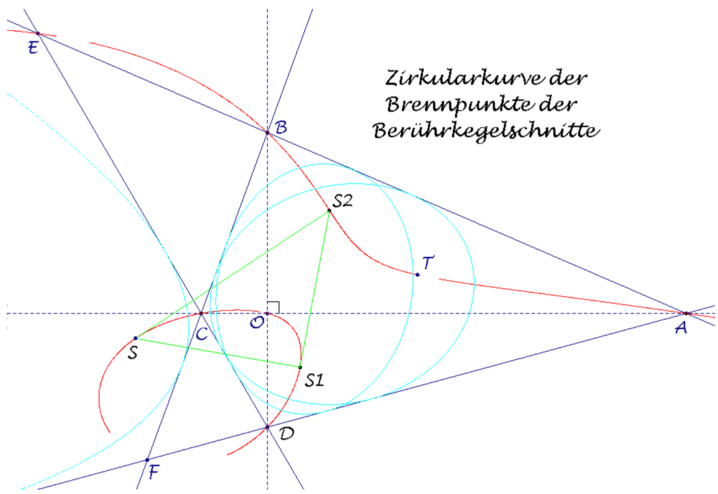
Die isogonal konjugierten Bilder eines Punktes bzgl. der vier Teildreiseite stimmen dann überein, wenn der Punkt auf einer Kurve liegt mit der Gleichung

$$(b+d)x(x^2+y^2+ag)+(a+g)y(x^2+y^2+bd)$$
$$-(a+g)(b+d)(x^2+y^2)-2(ag+bd)xy=0.$$

Diese Kurve, als Brennpunktkurve angesprochen, enthält nicht nur die Ecken *A, B, C, D* des ortho-diagonalen Vierecks, sondern auch den Diagonalenschnitt *O* und die Gegenseitenschnitte *E* und *F*; weiterhin die Steiner-Punkte *S*, S_1, S_2. Die Tangenten in *A, B, C, D* an diese Kurve schneiden sich im sogenannten Tangentialpunkt [Stä]

$$T\left(\frac{bd(a+g)}{ag+bd},\frac{ag(b+d)}{ag+bd}\right)$$

auf der Kurve.



Bzgl. der Teildreiseite isogonale Kurvenpunkte sind Brennpunkte von einbeschriebenen Kegelschnitten des ortho-diagonalen Vierecks. Speziell wären zu nennen: Der Steiner-Punkt *S* ist der Brennpunkt der Berührparabel des Vierecks. Die Steiner-Punkte S_1 und S_2 sind Brennpunkte eines speziellen Berührkegelschnitts, dessen Nebenachse die Newton-Gerade ist. Auch Diagonalenschnitt *O* und Tangentialpunkt *T* sind Brennpunkte eines Berührkegelschnitts.

Die gegenseitige Zuordnung der Brennpunkte auf der Kurve kann auch durch eine weitere Abbildung beschrieben werden, die sich am Steiner-Dreieck SS_1S_2 orientiert: Dabei handelt es sich um eine Spiegelung an einem Kreis um den Steiner-Punkt *S* mit dem Radius

$$\frac{\sqrt[4]{(a^2+b^2)(b^2+g^2)(g^2+d^2)(d^2+a^2)}}{\sqrt{(a+g)^2+(b+d)^2}}$$

und anschließender Spiegelung an der Winkelhalbierenden des Innenwinkels bei *S*.

> **Definition: Die Steiner-Inversion eines Vierecks ist eine am Steiner-Punkt *S* orientierte Kreisspiegelung mit anschließender Geradenspiegelung, die die Steiner-Punkte S_1 und S_2 vertauscht.**

Die Steiner-Inversion vertauscht nicht nur die Ecken S_1 und S_2 des Steiner-Dreiecks, sondern auch die Inkreismitte mit einer Ankreismitte sowie die beiden verbleibenden Ankreismitten. Beim Viereck werden die Gegenecken und die Gegenseitenschnitte vertauscht.

Bildpunkt von $X(x;y)$ ist für ortho-diagonale Vierecke

$$\Big(\frac{(a+g)(ag+bd)(x^2+(y-b)(y-d))-((ag+bd)^2+(da-bg)(ab-gd))x}{(x(b+d)-y(a+g))^2+(x(a+g)+y(b+d)-ag-bd)^2};$$
$$\frac{(b+d)(ag+bd)(y^2+(x-a)(x-g))-((ag+bd)^2-(da-bg)(ab-gd))y}{(x(b+d)-y(a+g))^2+(x(a+g)+y(b+d)-ag-bd)^2}\Big).$$

Die Steiner-Inversion bildet für ortho-diagonale Vierecke die Brennpunktkurve auf sich ab und stimmt für Kurvenpunkte mit der Isogonalität bzgl. der Teildreiseite überein, d.h. vertauscht die Brennpunkte der Berührkegelschnitte, wie z.B. Diagonalenschnitt und Tangentialpunkt.

> **Satz 2. Die Steiner-Inversion eines ortho-diagonalen Vierecks vertauscht die Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte.**

Da die Brennpunktkurve als Kurve dritter Ordnung isogonal invariant bzgl. der Teildreiseite ist und die absoluten Kreispunkte – in homogenen kartesischen Koordinaten $(1:i:0)$ und $(1:i:0)$ – enthält, kann sie als „isogonal circular cubic" *[Gib]* bzgl. der Teildreiseite angesprochen werden. Zur weiteren Untersuchung der Kurve sei hier aber eine kartesische Betrachtung abgebrochen.

Die Brennpunktkurve als Zirkularkurve eines Teildreiseits

Zur Beschreibung eines Vierecks, bzw. des zugehörigen Vierseits, in baryzentrischen Koordinaten sei eine gängige Methode aufgegriffen *[Ehr]*: Das Vierseit habe drei Seitengeraden *AB, BC, CA* eines Bezugsdreiecks *ABC* (jetzt Teildreiseit!) mit den Seitenlängen *a, b, c* und als vierte Seite die Tripolare eines Punktes $P(u:v:w)$ mit der Gleichung $vwx+wuy+uvz=0$. Diese Tripolare schneidet die Seitengeraden *BC, CA, AB* des Bezugsdreiecks in den Punkten

$$U(0:v:-w),\quad V(-u:0:w),\quad W(u:-v:0).$$

Das betrachtete Viereck sei *ABUV* und die Ortho-Diagonalität vorerst nicht berücksichtigt. Die Newton-Gerade für die Zentren der Berührkegelschnitte hat dann die Gleichung

$$(-u+v+w)x+(u-v+w)y+(u+v-w)z=0.$$

Wählt man ein Zentrum, das die Diagonalenmitten im Verhältnis t teilt, so hat der Berührkegelschnitt die Gleichung

$$((w-u)(wy+vz)+t\,(w-v)(wx+uz))^2-4tw^2(w-u)(w-v)xy=0\,.$$

Zur Bestimmung der Brennpunktkurve seien wieder die Isogonalitäten bzgl. der Teildreiseite betrachtet, die für einen Brennpunkt $X(x:y:z)$ das gleiche Bild liefern müssen:

bzgl. *ABC*: $(a^2yz:b^2zx:c^2xy)$,

bzgl. *CVU*: $$\left(\frac{K+S_Bw^2}{w}y:\frac{K+S_Aw^2}{w}x:-\frac{(K+S_Aw^2)(wx+uz)x+(K+S_Bw^2)(wy+vz)y+c^2uvwxy}{vwx+wuy+uvz}\right),$$

bzgl. *BUW*: $$\left(-(K+S_Bw^2)z:\frac{(K+S_Bw^2)(wy+vz)vz+(c^2v^2-K-S_Aw^2)uwxz}{vwx+wuy+uvz}+c^2vwx:-c^2w^2x\right),$$

bzgl. *AVW*: $$\left(\frac{(K+S_Aw^2)(wx+uz)uz+(c^2u^2-K-S_Bw^2)vwyz}{vwx+wuy+uvz}+c^2uwy:-(K+S_Aw^2)z:-c^2w^2y\right).$$

Dabei werden die Conway-Abkürzungen S_A, S_B, S_C mit

$$2S_A=-a^2+b^2+c^2,\quad 2S_B=a^2-b^2+c^2,\quad 2S_C=a^2+b^2-c^2$$

als auch eine lokale Konstante $K=c^2uv-(S_Au+S_Bv)w$ benutzt. Die isogonalen Bilder eines Punktes bzgl. der Teildreiseite stimmen überein, wenn der Punkt auf der Brennpunktkurve liegt, jetzt mit der Gleichung

$$\frac{ux(c^2y^2+b^2z^2)+vy(a^2z^2+c^2x^2)+wz(b^2x^2+a^2y^2)}{2(S_Au+S_Bv+S_Cw)}+xyz=0\,.$$

In dieser Form findet sich die Gleichung auch bei *[Gib,4.1.2]* als Beispiel einer „non-pivotal isogonal circular cubic“ mit einem Hinweis auf den Fernpunkt

$$F(v-w:w-u:u-v)$$

der Asymptote, dessen isogonales Bild als „singular focus“ der Steiner-Punkt *S* ist:

$$S\left(\frac{a^2}{v-w}:\frac{b^2}{w-u}:\frac{c^2}{u-v}\right)\,.$$

Fordert man jetzt die Orthogonalität der Diagonalen des Vierecks *ABUV*, dann ist die Nebenbedingung

$$S_Au(v-w)+S_Bv(u-w)-S_Cw^2=0$$

zu berücksichtigen. Damit vereinfacht sich die Gleichung der Brennpunktkurve zu

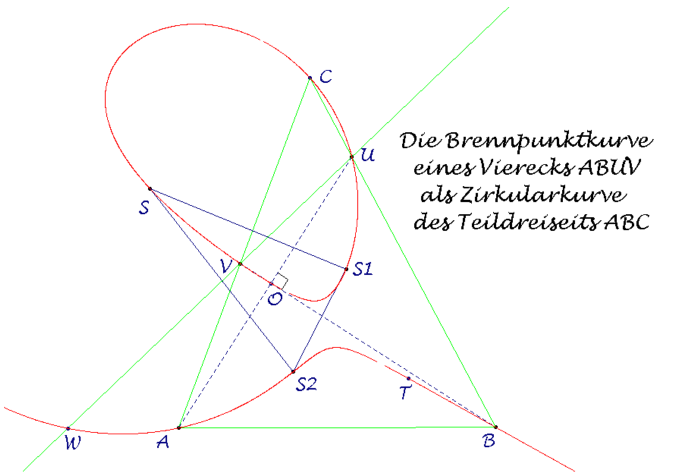
$$\frac{uwx(c^2y^2+b^2z^2)+vwy(a^2z^2+c^2x^2)+w^2z(b^2x^2+a^2y^2)}{2c^2uv}+xyz=0\,.$$

Diese Brennpunktkurve enthält – wie schon mit kartesischen Koordinaten bestätigt – den Diagonalenschnitt $O(u:v:-w)$ und sein isogonales Bild, den Tangentialpunkt

$$T(a^2vw:b^2wu:-c^2uv)\,;$$

weiterhin neben dem Steiner-Punkt *S* des Vierecks *ABUV* auch die isogonalen Steiner-Punkte S_1 und S_2 der Vierecke *ABVU* und *AVBU*:

$$S_1\left(\frac{S_C}{w-u}:\frac{S_C}{w-v}:\frac{c^2}{w}\right)\quad,\quad S_2\left(\frac{a^2}{w-u}:\frac{b^2}{w-u}:\frac{S_C w}{(w-u)(w-v)}\right).$$



Die Brennpunktkurve
als Zirkularkurve des Steiner-Dreiecks

Das Steiner-Dreieck eines ortho-diagonalen Vierecks zeigt einen starken Bezug zur betrachteten Brennpunktkurve; es sei daher abschließend als neues Bezugsdreieck $ABC=SS_1S_2$ für baryzentrische Koordinaten benutzt. Ein Viereck *A´B´C´D´* bzgl. seines Steiner-Dreiecks baryzentrisch zu erfassen, erweist sich als etwas aufwändig, ist aber mit den schon erwähnten Steiner-Inversionen der Vierecke *A´B´C´D´*, *A´B´D´C´*, *A´D´B´C´* möglich. Diese Steiner-Inversionen haben ihr Zentrum in einer Ecke des Steiner-Dreiecks und vertauschen die beiden anderen Ecken mit den Zuordnungen

$$s\,(x:y:z)=(a^2yz+b^2zx+c^2xy:-b^2z(x+y+z):-c^2y(x+y+z))\,,$$

$$s_1(x:y:z)=(-a^2z(x+y+z):a^2yz+b^2zx+c^2xy:-c^2x(x+y+z))$$

,

$$s_2(x:y:z)=(-a^2y(x+y+z):-b^2x(x+y+z):a^2yz+b^2zx+c^2xy)\,.$$

Gibt man eine Ecke $A'(x:y:z)$ des Vierecks *A´B´C´D´* vor, so sind die weiteren Ecken des Vierecks

$$B'=s_2A',\quad C'=sA',\quad D'=s_1A'.$$

Fordert man jetzt die Orthogonalität der Diagonalen, dann ergibt sich die Bedingung

$$a^2yz(S_By-S_Cz)-b^2zx(S_Bx+a^2z)+c^2xy(S_Cx+a^2y)=0\ ,$$

d.h. der Punkt *A´* muss auf einer Kurve liegen mit dieser Gleichung. Man bestätigt unmittelbar, dass diese Kurve die Steiner-Punkte und weiteren Ecken des Vierecks enthält und durch die Steiner-Inversionen auf sich abgebildet wird. Damit ist zu vermuten, dass diese Kurve auch die Brennpunktkurve des ortho-diagonalen Vierecks ist. Um dies zu bestätigen, lässt sich die Gleichung auch direkt aus den Berechnungen in kartesischen Koordinaten ableiten. Die kartesischen Koordinaten x und y eines Punktes lassen sich wie folgt in die baryzentrischen Koordinaten

$$\left(Det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} : Det\begin{pmatrix} x_A & y_B & 1 \\ x & y & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} : Det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} \right)$$

bzgl. eines Dreiecks *ABC* umrechnen unter Berücksichtigung der Seitenlängen ***a, b, c***. Im vorliegenden Fall sind dazu die kartesischen Koordinaten von S, S_1, S_2 (s.o.) für das Bezugsdreieck *ABC* zu benutzen und die folgenden Seitenlängen einzuarbeiten:

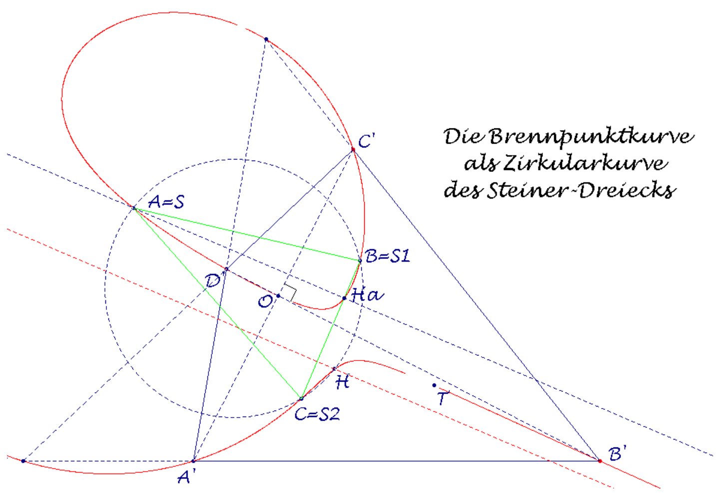
$$SS_1 = c = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(g^2+d^2)}{(a+g)^2+(b+d)^2}}, \quad SS_2 = b = \sqrt{\frac{(b^2+g^2)(a^2+d^2)}{(a+g)^2+(b+d)^2}},$$

$$S_1S_2 = a = \frac{(a-g)(b-d)}{(a-g)^2+(b-d)^2}\sqrt{(a+g)^2+(b+d)^2} \ .$$

Die obige Darstellung der Brennpunktkurve in baryzentrischen Koordinaten des Steiner-Dreiecks des ortho-diagonalen Vierecks eröffnet weitere Betrachtungen. Wesentlichste Eigenschaft dieser Kurve ist die Isogonalität bzgl. des Steiner-Dreiecks. Der Fernpunkt der Asymptoten

$$F(a^2 : -S_C : -S_B)$$

ist der zugehörige Pivot-Punkt, d.h. isogonale Kurvenpunkte liegen auf einer Parallelen zur Asymptote. Die Brennpunktkurve kann also bzgl. des Steiner-Dreiecks als „pivotal isogonal circular cubic“ *[Gib,4.1.1]* angesprochen werden.



Weiterhin erweist sich die Höhe h_a des Steiner-Dreiecks als Parallele zur Asymptote mit dem Höhenfußpunkt $H_a(0 : S_C : S_B)$ auf der Kurve. Damit ist die Brennpunktkurve eine der drei „pivotal isogonal focal circular cubics“ *[Gib,4.1.1]* des Steiner-Dreiecks. Der „singular focus“ der Kurve liegt im Steiner-Punkt S des ortho-diagonalen Vierecks, der an der Umkreismitte des Steiner-Dreiecks gespiegelt den Hautpunkt

$$H(S_B S_C : -b^2 S_B : -c^2 S_C)$$

der Kurve ergibt, in dem die Asymptote die Kurve schneidet.

Satz 3. Die Brennpunkte der Berührkegelschnitte eines ortho-diagonalen Vierecks liegen auf einer „pivotal isogonal focal circular cubic“ des Steiner-Dreiecks.

Das schon kartesisch angesprochene Brennpunkte-Paar, bestehend aus dem Diagonalenschnitt O und dem Tangentialpunkt T, kann bzgl. des Steiner-Dreiecks kaum übersichtlich dargestellt werden. Dagegen lässt sich ein weiteres Paar von Brennpunkten aufzeigen, bestehend aus dem Höhenfußpunkt H_a des Steiner-Dreiecks und dem Hauptpunkt H der Kurve.

Literatur

[Gib] J.-P. Ehrmann and B. Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. – http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert.

[Alt] N. Altshiller-Court: College Geometry. – Dover Publications, 2007.

[Ehr] J.-P. Ehrmann: Steiner´s Theorms on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52.

[Stä] R. Stärk, D. Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44, Jg. 2002, S.19.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de